



Journal of Advanced Research in Applied Sciences and Engineering Technology

Journal homepage:

<https://semarakilmujournal.com.my/index.php/araset>
ISSN: 2462-1943



Analisis Perbandingan Kaedah Runge-Kutta Tertib Keempat dan Peramal-Pembetul Heun dalam Pemodelan SIR bagi Penularan COVID-19 di Pulau Pinang

Comparative Analysis of the Fourth-Order Runge-Kutta and Heun Predictor-Corrector Methods in SIR Modeling of COVID-19 Transmission in Penang

Nur Rusyidah Azri¹, Saratha Sathasivam^{1,*}, Aceng Sambas^{2,3}

³ School of Mathematical Sciences, Universiti Sains Malaysia, 11800 USM, Penang, Malaysia

² Faculty of Informatics and Computing, Universiti Sultan Zainal Abidin, Kampus Besut, 22200 Terengganu, Malaysia

³ Department of Mechanical Engineering, Universiti Muhammadiyah Tasikmalaya, 46196 Tasikmalaya, Indonesia

ARTICLE INFO

Article history:

Received 2 March 2026

Received in revised form 7 March 2026

Accepted 15 March 2026

Available online 18 March 2026

ABSTRACT

Kemunculan SARS-CoV-2 pada penghujung tahun 2019 telah mencetuskan pandemik COVID-19 yang mendorong penggunaan model epidemiologi secara meluas bagi memahami dinamika penularan penyakit. Antara model yang sering digunakan ialah model Susceptible-Infected-Recovered (SIR), yang dirumuskan melalui sistem persamaan pembezaan tak linear. Oleh kerana penyelesaian analitik bagi sistem ini lazimnya tidak diperolehi secara langsung, kaedah penyelesaian numerik diperlukan untuk menghampiri trajektori wabak. Kajian ini bertujuan untuk membandingkan prestasi kaedah Runge-Kutta tertib keempat (RK4) dan kaedah peramal-pembetul Heun dalam menyelesaikan model SIR bagi penularan COVID-19 di Pulau Pinang, Malaysia. Data harian COVID-19 dari 1 Januari 2023 hingga 30 November 2023 digunakan dalam simulasi dengan tetapan parameter yang sama bagi kedua-dua kaedah. Keputusan simulasi menunjukkan bahawa kedua-dua kaedah menghasilkan trajektori wabak yang hampir seragam serta meramalkan hari puncak jangkitan yang sama. Nilai maksimum individu dijangkiti yang diramalkan ialah 373,458 kes menggunakan kaedah RK4 dan 372,957 kes menggunakan kaedah Heun, dengan perbezaan yang sangat kecil. Analisis ralat mutlak turut menunjukkan bahawa kedua-dua kaedah memberikan anggaran yang hampir dengan data sebenar, di mana kaedah Heun menunjukkan sedikit kelebihan pada fasa awal simulasi. Secara keseluruhannya, walaupun kaedah RK4 mempunyai ketepatan teori yang lebih tinggi, kaedah Heun memberikan prestasi yang setanding dalam konfigurasi langkah masa yang digunakan. Kajian ini menyumbang kepada pemahaman tentang pemilihan kaedah numerik yang sesuai dalam pemodelan epidemiologi serta menyediakan panduan praktikal bagi simulasi trajektori wabak berasaskan data sebenar.

At the end of 2019, the emergence of SARS-CoV-2 led to the global COVID-19 pandemic, prompting extensive use of epidemiological models to understand disease transmission

* Corresponding author.

E-mail address: saratha@usm.my

<https://doi.org/10.37934/araset.57.5.8296>

Keywords:

COVID-19; epidemiologi; kaedah peramal-pembetul Heun; kaedah Runge-Kutta; model SIR

COVID-19; epidemiology; Heun predictor-corrector method; Runge-Kutta method; SIR model

dynamics. Among these models, the Susceptible-Infected-Recovered (SIR) framework is widely applied to describe the evolution of infectious diseases through systems of nonlinear ordinary differential equations. Since analytical solutions are generally unavailable, numerical methods are required to obtain approximate solutions. This study aims to compare the performance of the fourth-order Runge-Kutta (RK4) method and the Heun predictor-corrector method in solving the SIR model for COVID-19 transmission in Penang, Malaysia. Daily COVID-19 data from 1 January 2023 to 30 November 2023 were utilized, and simulations were performed using identical parameter settings for both numerical approaches. The results indicate that both methods produce highly consistent epidemic trajectories, with identical peak infection timing. The predicted peak number of infected individuals was 373,458 using RK4 and 372,957 using the Heun method, showing only a marginal numerical difference. Absolute error analysis further demonstrates that both methods closely approximate the observed data, with the Heun method exhibiting slightly better agreement during the early phase of the outbreak. Overall, the findings suggest that while RK4 theoretically provides higher-order accuracy, the Heun method offers comparable performance under the selected time-step configuration. This study contributes to the understanding of numerical method selection in epidemiological modeling and provides practical insight for simulation-based pandemic analysis.

1. Pengenalan

Kemunculan virus baharu SARS-CoV-2 di Wuhan, Wilayah Hubei, China pada Disember 2019 telah mencetuskan satu krisis kesihatan global yang tidak pernah dialami dalam sejarah moden. Virus ini menyebabkan penyakit COVID-19, iaitu penyakit pernafasan yang mempunyai kadar kebolejangkitan yang tinggi serta potensi komplikasi serius, khususnya dalam kalangan individu berisiko tinggi. Dalam tempoh yang singkat, jangkitan ini merebak merentasi sempadan negara dan seterusnya diisytiharkan sebagai pandemik oleh Pertubuhan Kesihatan Sedunia [1,2]. Pengisytiharan tersebut menandakan bahawa penularan penyakit ini bukan lagi bersifat tempatan atau serantau, tetapi telah menjadi ancaman kesihatan awam pada skala global. Penyebaran COVID-19 memberi kesan yang besar terhadap sistem kesihatan, struktur sosial dan kestabilan ekonomi banyak negara termasuk Itali, Amerika Syarikat dan Malaysia [3,4]. Bagi membendung penularan jangkitan, pelbagai langkah kawalan telah diperkenalkan seperti penjarakan sosial, sekatan pergerakan, kuarantin, penggunaan pelitup muka dan kempen vaksinasi [5]. Walaupun langkah-langkah ini berkesan dalam mengurangkan kadar jangkitan pada peringkat tertentu, pelaksanaannya turut memberi kesan langsung terhadap operasi hospital, kapasiti rawatan serta kesejahteraan masyarakat secara keseluruhan [6,7]. Keadaan ini menuntut satu pendekatan yang sistematik dan berasaskan bukti bagi memahami corak penyebaran penyakit serta merancang intervensi yang bersesuaian.

Dalam konteks ini, epidemiologi memainkan peranan penting dalam menganalisis taburan, corak dan faktor yang mempengaruhi penyebaran penyakit berjangkit. Melalui analisis data dan pendekatan kuantitatif, epidemiologi berupaya menerangkan pola serta dinamika penularan jangkitan dalam populasi dari masa ke semasa [8,9]. Dalam konteks ini, model matematik berfungsi sebagai kerangka formal untuk memodelkan interaksi antara individu terdedah, dijangkiti dan pulih, serta untuk menganalisis perubahan struktur populasi akibat penyebaran penyakit. Model ini membolehkan penyelidik menganggar kadar penularan, kadar pemulihan serta meramalkan trajektori wabak berdasarkan parameter tertentu. Salah satu model asas yang paling banyak digunakan dalam kajian epidemiologi ialah model Susceptible-Infected-Recovered (SIR). Model ini membahagikan populasi kepada tiga kompartmen utama, iaitu individu terdedah (Susceptible), individu dijangkiti (Infected), dan individu pulih (Recovered). Peralihan antara kompartmen ini digambarkan melalui sistem persamaan pembezaan biasa tak linear yang bergantung kepada parameter kadar penularan dan kadar pemulihan. Walaupun model SIR bersifat ringkas dari segi

struktur, ia berupaya memberikan gambaran awal yang jelas tentang dinamika penyebaran penyakit dalam populasi yang homogen.

Namun demikian, sistem persamaan dalam model SIR lazimnya tidak mempunyai penyelesaian analitik tertutup, terutamanya apabila parameter atau struktur model diperluaskan. Keadaan ini menjadikan kaedah penyelesaian numerik sebagai pendekatan utama dalam mendapatkan anggaran penyelesaian fungsi populasi terhadap masa. Keputusan simulasi yang diperoleh melalui kaedah numerik kemudiannya digunakan untuk menganalisis puncak jangkitan, tempoh wabak dan kesan perubahan parameter terhadap trajektori penyakit. Oleh itu, pemilihan kaedah numerik yang sesuai adalah amat penting dalam memastikan ketepatan dan kestabilan simulasi model epidemiologi. Kaedah yang berbeza mempunyai tertib ketepatan, ralat pemangkasan dan ciri kestabilan yang berlainan. Perbezaan ini boleh mempengaruhi bentuk lengkung epidemik yang dihasilkan serta anggaran masa dan magnitud puncak jangkitan. Justeru, kajian perbandingan antara kaedah numerik yang berbeza adalah relevan bagi menentukan pendekatan yang paling sesuai untuk sesuatu konteks data dan populasi.

1.1 Permasalahan Kajian

Kebanyakan model epidemiologi seperti model SIR dirumuskan dalam bentuk sistem persamaan pembezaan biasa tak linear. Dalam banyak keadaan, penyelesaian analitik bagi sistem ini sama ada tidak wujud atau terlalu kompleks untuk digunakan secara praktikal [10]. Oleh itu, kaedah penyelesaian numerik digunakan secara meluas untuk menghampiri penyelesaian sistem dan menganalisis tingkah laku dinamik populasi dari semasa ke semasa. Pelbagai kajian terdahulu telah menunjukkan keberkesanan pendekatan numerik dalam pemodelan epidemiologi. Mangal et al., [11] membincangkan penggunaan kaedah pembezaan berangka dalam model SIRS bertertib pecahan, manakala İlhan dan Şahin [12] menggunakan siri Morgan-Voyce melalui teknik kolokasi untuk menyelesaikan model SIR. Prathom dan Jampeepan [13] pula mencadangkan pendekatan siri Dirichlet bagi mendapatkan penyelesaian model SIR dan SEIR. Selain itu, kajian oleh Azri et al., [14] serta Salaudeen et al., [15] membuktikan bahawa kaedah numerik mampu menghasilkan simulasi yang realistik terhadap penularan COVID-19 di Malaysia.

Antara kaedah numerik yang sering digunakan dalam penyelesaian persamaan pembezaan biasa ialah kaedah Runge-Kutta tertib keempat (RK4) dan kaedah peramal-pembetulan Heun. Kaedah RK4 dikenali kerana ketepatan tertib keempat serta keseimbangan antara ralat pemangkasan dan kos pengiraan. Kaedah ini menggunakan empat cerun perantaraan dalam setiap langkah masa bagi menghasilkan anggaran yang lebih tepat. Sebaliknya, kaedah Heun ialah kaedah tertib kedua yang menggunakan mekanisme peramal dan pembetulan untuk meningkatkan ketepatan berbanding kaedah Euler klasik. Walaupun tertib teorinya lebih rendah, kaedah Heun sering menunjukkan kestabilan yang baik dalam keadaan tertentu.

Walaupun bagaimanapun, perbandingan sistematik antara kaedah RK4 dan kaedah peramal-pembetulan Heun dalam konteks data sebenar COVID-19 di Pulau Pinang masih belum dibincangkan secara khusus dalam literatur sedia ada. Kebanyakan kajian terdahulu lebih menumpukan kepada pembangunan atau pengubahsuaian struktur model epidemiologi, manakala analisis perbandingan kaedah penyelesaian numerik berdasarkan data tempatan adalah terhad. Selain itu, ketepatan teori sesuatu kaedah tidak semestinya menjamin prestasi praktikal yang lebih baik kerana keberkesanan numerik turut dipengaruhi oleh saiz langkah masa, nilai parameter epidemiologi serta sifat dinamik sistem yang dimodelkan. Oleh itu, wujud keperluan untuk menilai secara empirikal kestabilan dan ketepatan kaedah numerik dalam konteks aplikasi sebenar.

Pulau Pinang dipilih sebagai kawasan kajian kerana ciri demografi dan kepadatan penduduknya yang tinggi serta ketersediaan rekod data COVID-19 yang konsisten sepanjang tempoh kajian. Persekitaran ini menyediakan asas yang sesuai untuk menilai kesesuaian praktikal kedua-dua kaedah dalam menggambarkan trajektori wabak sebenar. Sehubungan itu, kajian ini bertujuan untuk menjalankan analisis perbandingan antara kaedah RK4 dan kaedah Heun dalam menyelesaikan model SIR bagi penularan COVID-19 di Pulau Pinang. Perbandingan dilakukan berdasarkan ketepatan simulasi terhadap data sebenar serta keupayaan kedua-dua kaedah dalam meramalkan magnitud dan tempoh puncak jangkitan. Kajian ini menyumbang kepada literatur pemodelan epidemiologi dengan menyediakan penilaian empirikal terhadap prestasi praktikal kaedah numerik dalam konteks data tempatan, sekali gus membantu dalam pemilihan pendekatan penyelesaian yang sesuai untuk aplikasi epidemiologi sebenar.

Objektif kajian ini adalah seperti berikut:

1. Meneroka dan membandingkan ketepatan kaedah Runge-Kutta tertib keempat dan kaedah peramal-pembetul Heun dalam penyelesaian model SIR.
2. Menilai kesesuaian praktikal kedua-dua kaedah dalam menggambarkan dinamik penularan COVID-19 di Pulau Pinang berdasarkan data sebenar.

2. Metodologi Kajian

2.1 Model SIR

Kajian Model SIR adalah salah satu model asas dalam penyelidikan epidemiologi dan digunakan untuk membangunkan pelbagai model lain [16]. Model matematik ini pertama kali diperkenalkan oleh Kermack & Anderson [17] pada awal abad ke-20 dan sejak itu telah digunakan secara meluas dalam kajian epidemiologi untuk memahami dan meramalkan penyebaran penyakit berjangkit dalam populasi. Secara ringkasnya, model SIR membantu pemahaman berkaitan perkembangan dan dinamik wabak dari semasa ke semasa. Seiring dengan perkembangan masa, model SIR klasik telah diperluas dengan penggabungan struktur umur, tingkah laku sosial, dan taburan ruang, menjadikannya lebih relevan untuk menggambarkan situasi dunia sebenar yang kompleks [18].

Dalam model SIR, individu dalam populasi dikategorikan berdasarkan status mereka berkaitan dengan penyakit: 'Susceptible' (terdedah), 'Infected' (terjangkit), dan 'Recovered' (pulih). Mereka yang berada dalam kumpulan 'Susceptible' adalah berisiko untuk dijangkiti penyakit, manakala 'Infected' merujuk kepada mereka yang telah dijangkiti dan mampu menyebarkan penyakit kepada orang lain. 'Recovered' pula terdiri daripada individu yang telah sembuh dan lazimnya memiliki imuniti terhadap penyakit tersebut. Perubahan dalam komponen-komponen ini digambarkan melalui persamaan pembezaan tidak linear yang menentukan kadar peralihan individu.

Dalam konteks pandemik COVID-19, model SIR telah digunakan secara meluas untuk mengira kadar jangkitan berdasarkan faktor tingkah laku sosial melalui penjarakan sosial dan penggunaan pelitup muka, serta kadar pemulihan yang dipengaruhi oleh keberkesanan rawatan dan imuniti semula jadi. Dengan menggabungkan parameter-parameter yang lebih spesifik ini, model SIR membantu menghasilkan ramalan yang lebih tepat mengenai trajektori wabak dan berfungsi sebagai panduan penting dalam merangka strategi pencegahan untuk mengawal penyebaran COVID-19. Hal ini membantu analisis mengenai keberkesanan strategi kawalan seperti vaksinasi, penjarakan sosial, kuarantin, dan langkah-langkah pencegahan lain [19].

Kami menggunakan model epidemiologi klasik SIR dengan dua parameter untuk menganalisis dinamik penularan COVID-19 di kawasan metropolitan Pulau Pinang, Malaysia. Penyebaran penyakit berjangkit dalam populasi tersebut diwakili oleh sistem persamaan pembezaan, yang

menggambarkan perubahan bilangan individu dalam setiap kategori iaitu 'Susceptible' S , 'Infected' I , dan 'Recovered' R . Persamaan-persamaan ini adalah seperti berikut:

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\beta S(t)I(t)}{N} \quad (1)$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta S(t)I(t)}{N} - \gamma I(t) \quad (2)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I \quad (3)$$

di mana $S(t)$ mewakili bilangan individu yang terdedah kepada penyakit pada masa t , $I(t)$ mewakili bilangan individu yang sedang dijangkiti pada masa t , dan $R(t)$ merujuk kepada bilangan individu yang telah pulih pada masa t . Jumlah populasi keseluruhan diwakili oleh N , $N = S + I + R$. Manakala parameter β ialah kadar penularan penyakit, dan γ ialah kadar pemulihan. Figure 1 menunjukkan ilustrasi skematik yang menggambarkan aliran individu melalui status terdedah, dijangkiti, dan pulih. Aplikasi model SIR dalam kajian ini bergantung pada beberapa anggapan utama: (i) populasi, kadar penularan, dan kadar pemulihan dianggap tetap sepanjang tempoh kajian. (ii) individu yang pulih memperoleh imuniti sepenuhnya terhadap penyakit itu.



Fig. 1. Ilustrasi skematik komponen-komponen model SIR

2.2 Kaedah Peramal-Pembetul Heun

Kaedah peramal-pembetul Heun juga dikenali sebagai kaedah Euler terbaik kerana kaedah ini ialah versi lanjutan daripada kaedah Euler klasik dan lebih praktikal apabila ketepatan diperlukan. Kaedah ini terbahagi kepada dua fasa utama iaitu fasa peramal yang menggunakan cerun awal untuk menganggar penyelesaian pada titik masa berikutnya, dan fasa pembetul yang menggunakan cerun purata daripada fasa peramal untuk memperbaiki anggaran sebelumnya. Dalam pembentukan kaedah Heun, kaedah Euler digunakan untuk mengira cerun pada satu titik y_n , yang kemudian digunakan untuk menghampiri penyelesaian pada titik masa berikutnya y_{n+1} . Formula bagi kaedah Euler adalah seperti berikut [20]:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \quad (4)$$

di sini, y_{n+1} mewakili nilai anggaran penyelesaian pada titik masa seterusnya, y_n adalah nilai penyelesaian semasa, h adalah panjang selang masa (juga dikenali sebagai langkah masa), t_n merujuk kepada titik masa semasa, dan $f(t_n, y_n)$ ialah fungsi yang menggambarkan kadar perubahan pada titik (t_n, y_n) .

Sebagai kaedah yang berasaskan proses iteratif, kaedah Heun memerlukan syarat awal (t_0, y_0) iaitu nilai permulaan model tersebut untuk menghampiri penyelesaian persamaan pembezaan. Formula untuk peramal Heun y_{n+1}^p dan pembetul Heun y_{n+1}^c adalah seperti berikut:

$$y_{n+1}^p = y_n + hf(t_n, y_n) \quad (5)$$

$$y_{n+1}^c = y_n + \frac{h}{2} [f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1}^p)] \quad (6)$$

Jika diperhatikan, formula peramal Heun dalam Eq. (5) adalah sama dengan formula Euler dalam Eq. (4). Kaedah Heun menggunakan cerun purata sebagai langkah pembetulan, yang meningkatkan ketepatan anggaran yang diperoleh pada setiap langkah. Eq. (6) menunjukkan bahawa nilai penyelesaian suatu titik itu y_{n+1}^c hanya bergantung pada penyelesaian peramalnya y_{n+1}^p dan anggaran sebelumnya y_n . Walaupun kaedah numerik Heun merupakan salah satu pendekatan yang praktikal, namun ketepatan kaedah ini bergantung kepada saiz langkah masa h . Saiz langkah yang lebih kecil akan menghasilkan anggaran yang lebih tepat, namun memerlukan lebih banyak iterasi untuk mencapai ketepatan yang dikehendaki dan boleh meningkatkan beban pengiraan secara signifikan. Kaedah Heun ini boleh digunakan untuk menyelesaikan model SIR yang telah dinyatakan dalam Eqs. (1) – (3). Pada permulaan pemerhatian iaitu $t = 0$, bilangan awal individu yang terdedah, dijangkiti, dan pulih masing-masing ditunjukkan sebagai $S(0)$, $I(0)$, dan $R(0)$. Model itu boleh ditransformasikan ke dalam bentuk iteratif menggunakan langkah-langkah berikut:

Langkah pertama melibatkan pengiraan cerun awal bagi setiap persamaan pembezaan.

$$\begin{aligned}K_1^S &= f_1(t_n, S_n, I_n, R_n) \\K_1^I &= f_2(t_n, S_n, I_n, R_n) \\K_1^R &= f_3(t_n, S_n, I_n, R_n)\end{aligned}$$

Dalam persamaan di atas, f_1 merupakan $\frac{dS}{dt}$, f_2 merupakan $\frac{dI}{dt}$, dan f_3 merupakan $\frac{dR}{dt}$. Langkah kedua ialah pengiraan nilai perantaraan menggunakan kaedah Euler serta nilai cerun yang diperoleh dalam langkah pertama.

$$\begin{aligned}S_{n+1}^{\text{Euler}} &= S_n + hK_1^S \\I_{n+1}^{\text{Euler}} &= I_n + hK_1^I \\R_{n+1}^{\text{Euler}} &= R_n + hK_1^R\end{aligned}$$

Langkah ketiga melibatkan pengiraan pada titik perantaraan menggunakan hasil daripada langkah kedua.

$$\begin{aligned}K_2^S &= f_1(t_n + h, S_{n+1}^{\text{Euler}}, I_{n+1}^{\text{Euler}}, R_{n+1}^{\text{Euler}}) \\K_2^I &= f_2(t_n + h, S_{n+1}^{\text{Euler}}, I_{n+1}^{\text{Euler}}, R_{n+1}^{\text{Euler}}) \\K_2^R &= f_3(t_n + h, S_{n+1}^{\text{Euler}}, I_{n+1}^{\text{Euler}}, R_{n+1}^{\text{Euler}})\end{aligned}$$

Akhirnya, penyelesaian dikira dengan mengambil purata daripada dua cerun yang diperoleh dalam langkah pertama dan ketiga.

$$\begin{aligned}S_{n+1} &= S_n + \frac{h}{2}(K_1^S + K_2^S) \\I_{n+1} &= I_n + \frac{h}{2}(K_1^I + K_2^I) \\R_{n+1} &= R_n + \frac{h}{2}(K_1^R + K_2^R)\end{aligned}$$

Dalam proses ini, penyelesaian bagi S_{n+1} , I_{n+1} , dan R_{n+1} dikemas kini pada setiap langkah masa, dari t_0 sehingga t_n di mana $t_n = t_{n-1} + h$. Nilai S_{n+1}^{Euler} , I_{n+1}^{Euler} , dan R_{n+1}^{Euler} merujuk kepada penyelesaian pada peringkat peramal bagi setiap komponen, manakala S_{n+1} , I_{n+1} , dan R_{n+1} ialah penyelesaian pada peringkat pembetul. Kaedah peramal-pembetul Heun dilaporkan mempunyai ralat

pemangkasan tempatan $O(h^2)$, yang bermaksud bahawa ketepatan anggaran penyelesaian bertambah baik secara kuadratik apabila saiz langkah h dikurangkan [21]. Ini menunjukkan bahawa kaedah ini lebih tepat berbanding kaedah Euler yang hanya mempunyai ralat pemangkasan tempatan $O(h)$.

2.3 Kaedah Runge-Kutta Tertib Ke-4

Kaedah Runge-Kutta tertib keempat (RK4) sering menjadi pilihan kerana kecekapan pengiraan dan ketepatannya, tanpa memerlukan saiz langkah yang sangat kecil [22, 23]. Ia dicadangkan pada awal abad ke-20 oleh dua ahli matematik Jerman, Carl Runge dan Martin Kutta. Kekuatan RK4 terletak pada keupayaannya untuk mengira penyelesaian pada langkah masa berikutnya dengan mengira kecerunan penyelesaian pada beberapa titik perantaraan dalam setiap langkah. Ini memberikan maklumat numerik yang penting di antara dua langkah masa berturut-turut [24, 25]. Dengan menggabungkan penilaian ini dan maklumat numerik antara dua langkah masa, RK4 secara efektif mengimbangi pengumpulan ralat dan beban pengiraan.

RK4 memerlukan empat cerun purata berwajaran (K-nilai) dalam sebuah selang masa h . Cerun pertama K_1 dikira pada permulaan selang masa, cerun kedua K_2 dan ketiga K_3 pada titik pertengahan dengan menggunakan kaedah Euler, manakala cerun keempat K_4 dikira pada akhir selang masa. Cerun-cerun ini kemudiannya digabung untuk pengiraan purata berwajaran untuk menganggarkan penyelesaian pada langkah masa seterusnya. Strategi ini mengurangkan ralat pemangkasan tempatan sambil mengekalkan ketepatan pada tertib keempat yang bermaksud bagi setiap langkah ialah berkadar dengan kuasa empat daripada saiz langkah, $O(h^4)$. Dengan syarat awal bagi setiap komponen, Eq. (7) menunjukkan formula iteratif untuk mencari penyelesaian menggunakan RK4.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (7)$$

Di mana

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n) \\ k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{hk_1}{2}\right) \\ k_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{hk_2}{2}\right) \\ k_4 &= f(t_n + h, y_n + hk_3) \end{aligned}$$

Kaedah ini boleh diperluas kepada model SIR dengan menggubah suai Eqs. (1) – (3) dengan menggunakan formula di Eq. (7). Langkah pertama ialah pengiraan cerun pertama bagi semua komponen.

$$\begin{aligned} k_1^S &= f_1(t_n, S_n, I_n, R_n) \\ k_1^I &= f_2(t_n, S_n, I_n, R_n) \\ k_1^R &= f_3(t_n, S_n, I_n, R_n) \end{aligned}$$

Langkah pertama untuk kaedah RK4 adalah sama dengan langkah pertama kaedah Heun. Langkah kedua melibatkan pengiraan titik perantaraan iaitu pada cerun kedua.

$$k_2^S = f_1\left(t_n + \frac{h}{2}, S_n + \frac{h}{2}k_1^S, I_n + \frac{h}{2}k_1^I, R_n + \frac{h}{2}k_1^R\right)$$

$$k_2^I = f_2 \left(t_n + \frac{h}{2}, S_n + \frac{h}{2} k_1^S, I_n + \frac{h}{2} k_1^I, R_n + \frac{h}{2} k_1^R \right)$$

$$k_2^R = f_3 \left(t_n + \frac{h}{2}, S_n + \frac{h}{2} k_1^S, I_n + \frac{h}{2} k_1^I, R_n + \frac{h}{2} k_1^R \right)$$

Langkah ketiga ialah pengiraan titik perantaraan seterusnya iaitu pada cerun ketiga.

$$k_3^S = f_1 \left(t_n + \frac{h}{2}, S_n + \frac{h}{2} k_2^S, I_n + \frac{h}{2} k_2^I, R_n + \frac{h}{2} k_2^R \right)$$

$$k_3^I = f_2 \left(t_n + \frac{h}{2}, S_n + \frac{h}{2} k_2^S, I_n + \frac{h}{2} k_2^I, R_n + \frac{h}{2} k_2^R \right)$$

$$k_3^R = f_3 \left(t_n + \frac{h}{2}, S_n + \frac{h}{2} k_2^S, I_n + \frac{h}{2} k_2^I, R_n + \frac{h}{2} k_2^R \right)$$

Langkah keempat melibatkan pengiraan cerun akhir.

$$k_4^S = f_1(t_n + h, S_n + h k_3^S, I_n + h k_3^I, R_n + h k_3^R)$$

$$k_4^I = f_2(t_n + h, S_n + h k_3^S, I_n + h k_3^I, R_n + h k_3^R)$$

$$k_4^R = f_3(t_n + h, S_n + h k_3^S, I_n + h k_3^I, R_n + h k_3^R)$$

Langkah terakhir ialah masukkan semua hasil daripada langkah pertama hingga keempat ke dalam Eq. (7) untuk mendapatkan penyelesaian bagi setiap komponen SIR model.

$$S_{n+1} = S_n + \frac{h}{6} (k_1^S + 2k_2^S + 2k_3^S + k_4^S)$$

$$I_{n+1} = I_n + \frac{h}{6} (k_1^I + 2k_2^I + 2k_3^I + k_4^I)$$

$$R_{n+1} = R_n + \frac{h}{6} (k_1^R + 2k_2^R + 2k_3^R + k_4^R)$$

RK4 ialah kaedah yang lebih panjang dan terperinci berbanding dengan kaedah Heun kerana ia melibatkan empat peringkat pengiraan cerun untuk setiap langkah masa. Walaupun RK4 lebih kompleks kerana ia mempunyai ralat pemangkas yang lebih rendah berbanding kaedah Heun.

2.4 Reka Bentuk Kajian

Dalam kajian ini, dinamik penularan wabak COVID-19 dimodelkan menggunakan model SIR, dengan menggunakan data yang dikumpul dari 1 Januari 2023 sehingga 30 November 2023. Data harian COVID-19 ini diperolehi daripada laman web rasmi Kementerian Kesihatan Malaysia (KKM). Populasi keseluruhan N dianggarkan sebanyak 1,774,200 orang. Kadar penularan untuk penyebaran COVID-19 dipengaruhi oleh pelbagai faktor seperti umur, kepadatan penduduk, infrastruktur kesihatan, amalan sosial dan budaya, liputan vaksinasi, serta kesedaran komuniti. Kadar penularan ini memberikan maklumat mengenai kelajuan penyebaran jangkitan, manakala kadar pemulihan memberikan gambaran tentang kelajuan pemulihan individu yang dijangkiti. Kadar pemulihan pesakit COVID-19 dipengaruhi oleh pelbagai faktor, termasuk tahap jangkitan, umur pesakit, komorbiditi (penyakit sedia ada), dan sejarah vaksinasi. Walaupun kebanyakan pesakit pulih dalam beberapa minggu, sebahagian besar mengalami gejala jangka panjang dan keterbatasan fungsi. Dalam kajian ini, anggaran kadar penularan β ialah 0.0162 dan kadar pemulihan γ ialah 0.0069, yang diambil daripada kajian terdahulu [26, 27]. Nilai β dan γ tersebut adalah relevan dengan konteks kajian ini kerana mempunyai konteks yang serupa dengan kawasan kajian ini.

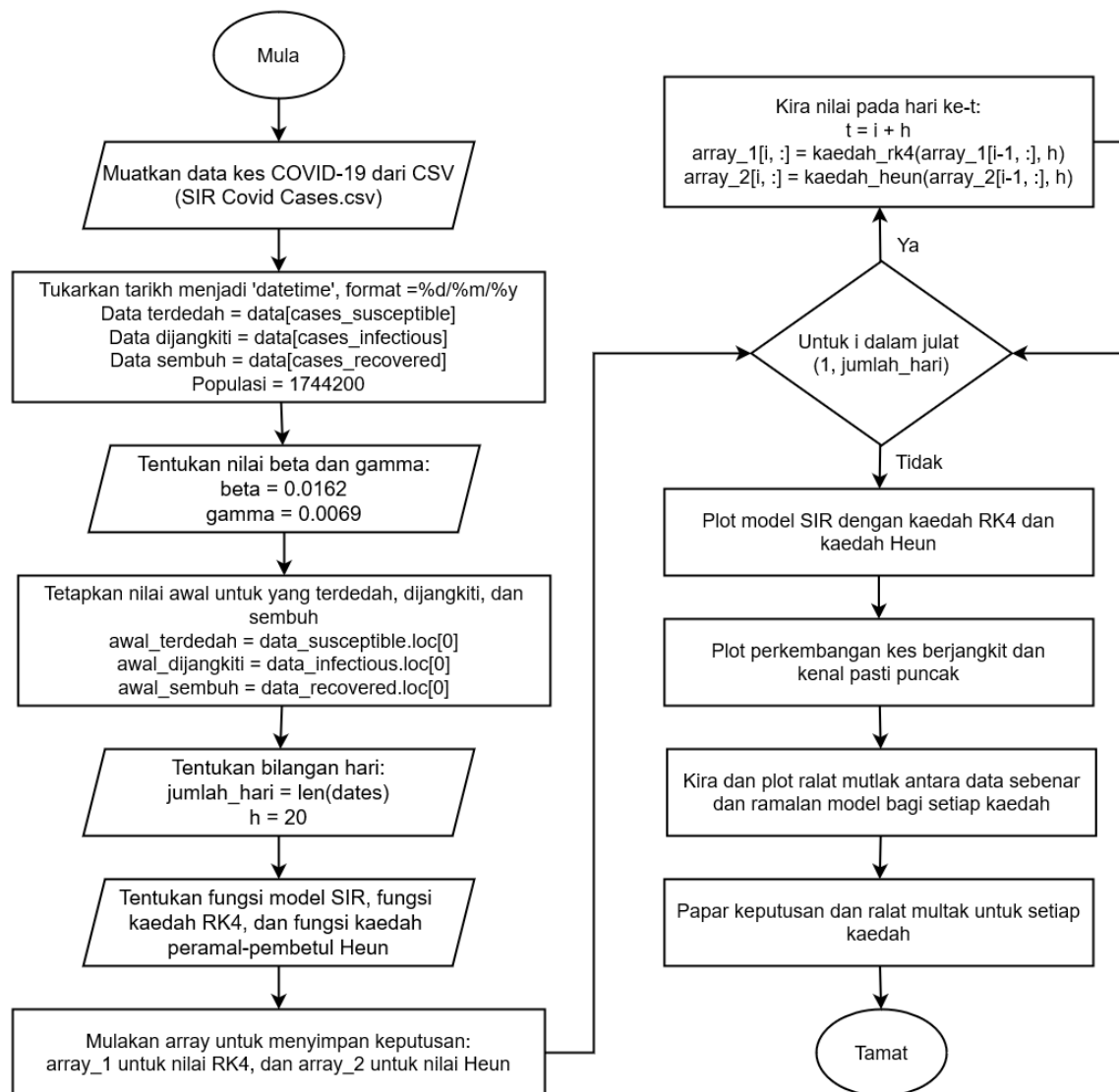


Fig. 2. Carta alir bagi pemodelan SIR menggunakan kaedah Runge-Kutta tertib keempat dan peramal-pembetulan Heun

Nilai awal bagi $S(0)$, $I(0)$, dan $R(0)$ ditetapkan berdasarkan populasi di Pulau Pinang dalam tempoh 1 Januari 2023 sehingga 30 November 2023. Data yang digunakan termasuk kes jangkitan, kes pemulihan, kes yang terdedah, dan kes kematian sepanjang tempoh tersebut. Data yang dikumpul adalah dalam bentuk harian, tetapi analisis model dilakukan setiap 20 hari untuk mengurangkan sensitiviti terhadap variasi harian yang mungkin tidak signifikan pada skala masa yang lebih panjang. Oleh itu, $h = 20$ dianggap sesuai kerana ia memfokuskan kepada trend jangka panjang dan perubahan dalam dinamik penularan penyakit. Nilai S_{n+1} , I_{n+1} , dan R_{n+1} untuk setiap langkah masa dikira menggunakan kaedah Heun dan RK4. Hasil yang diperolehi daripada kedua-dua kaedah ini kemudiannya dibandingkan, dan graf diplot untuk menganalisis ketepatan kaedah-kaedah ini untuk menentukan kaedah yang paling sesuai bagi menggambarkan dinamik penularan COVID-19 di Pulau Pinang. Proses metodologi yang telah dijelaskan digambarkan secara skematik dalam Figure 2.

3. Dapatan Kajian dan Perbincangan

Figure 3(a) menunjukkan lengkung biru yang mewakili bilangan individu terdedah S , dari masa ke semasa. Pada peringkat awal, hampir keseluruhan populasi berada dalam kompartmen terdedah sebelum menurun secara beransur-ansur selaras dengan peningkatan kes jangkitan. Lengkung merah menggambarkan bilangan individu dijangkiti I , yang meningkat dengan cepat sehingga mencapai puncak sebelum menurun apabila bilangan individu pulih bertambah. Berdasarkan kaedah RK4, puncak jangkitan diramalkan mencapai 373,458 kes. Lengkung hijau mewakili bilangan individu pulih R , yang meningkat secara berterusan sehingga menghampiri keseluruhan populasi..

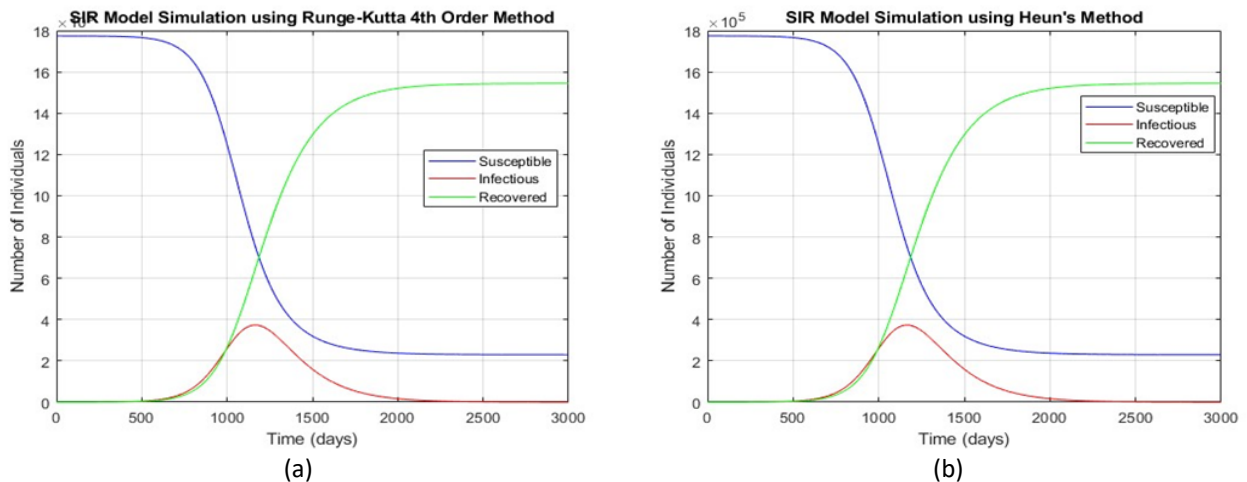


Fig. 3. Graf model SIR dengan (a) kaedah Runge-Kutta tertib keempat dan (b) kaedah peramal-pembetulan Heun

Figure 3(b) menunjukkan pola dinamik yang sama apabila model SIR diselesaikan menggunakan kaedah peramal-pembetulan Heun. Kaedah ini meramalkan puncak jangkitan sebanyak 372,957 kes pada hari yang sama seperti kaedah RK4. Persamaan dalam bentuk trajektori serta penentuan hari puncak menunjukkan bahawa kedua-dua kaedah adalah konsisten dalam menggambarkan perkembangan wabak. Keputusan simulasi menunjukkan pola dinamik yang konsisten dengan struktur model SIR, di mana bilangan individu terdedah berkurang selaras dengan peningkatan kes jangkitan, sebelum jangkitan mencapai puncak dan seterusnya menurun apabila bilangan individu pulih meningkat. Dinamik ini mencerminkan peralihan populasi antara kompartmen S , I dan R sepanjang tempoh simulasi serta menandakan kestabilan sistem apabila bilangan jangkitan menghampiri sifar.

Rajah 4 menunjukkan bahawa trajektori yang dihasilkan oleh kedua-dua kaedah hampir bertindih sepanjang tempoh simulasi. Sebagai contoh, pada hari ke-20, nilai S yang diperoleh menggunakan RK4 ialah 1,774,087.62 berbanding 1,774,087.71 bagi kaedah Heun. Perbezaan ini adalah sangat kecil dan tidak ketara pada skala graf. Pola yang sama diperhatikan bagi kompartmen I dan R , menunjukkan bahawa kedua-dua kaedah memberikan hasil yang hampir setara di bawah konfigurasi parameter dan langkah masa yang digunakan.

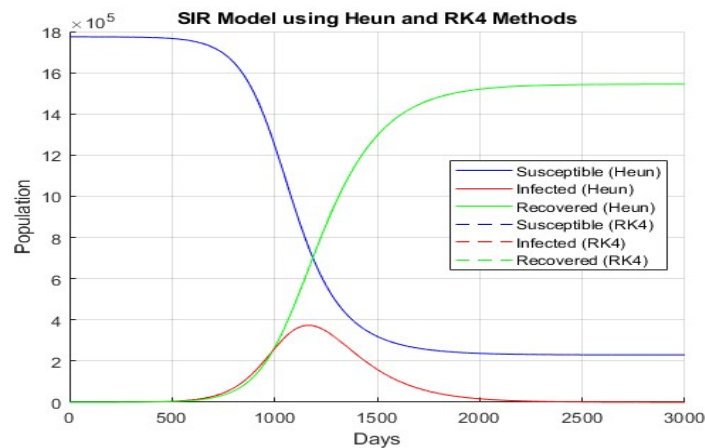


Fig. 4. Perbandingan model SIR yang diselesaikan menggunakan kaedah RK4 dan Heun

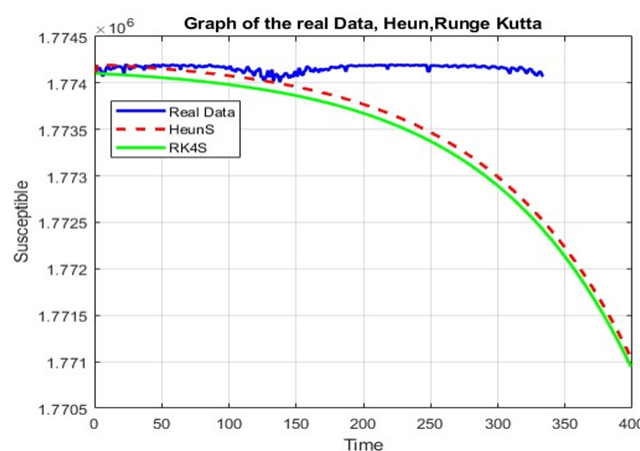


Fig. 5. Graf data sebenar dan hasil jumlah individu terdedah yang diperolehi menggunakan kaedah Heun dan Runge-Kutta tertib keempat untuk 400 hari pertama

Figure 5 membandingkan hasil simulasi dengan data sebenar. Didapati bahawa kedua-dua kaedah berjaya mengikuti corak umum data yang dilaporkan, dengan kaedah Heun menunjukkan sedikit kelebihan dari segi kesesuaian terhadap data sebenar bagi tempoh hari pertama hingga hari ke-150. Walaupun secara teori kaedah RK4 mempunyai ketepatan tertib yang lebih tinggi, hasil kajian ini menunjukkan bahawa kedua-dua kaedah memberikan prestasi yang setanding dalam konfigurasi yang digunakan. Perbezaan ini boleh dijelaskan melalui beberapa faktor. Pertama, kelebihan tertib keempat RK4 menjadi lebih signifikan apabila saiz langkah masa adalah kecil dan sistem menunjukkan perubahan yang lebih kompleks. Dalam kajian ini, langkah masa yang digunakan adalah tetap dan berskala sederhana, yang berkemungkinan mengurangkan dominasi kelebihan teori RK4.

Selain itu, ketepatan teori merujuk kepada ralat pemangkasan tempatan terhadap penyelesaian persamaan pembezaan, manakala penilaian dalam kajian ini dibuat berdasarkan kesesuaian terhadap data sebenar. Variasi data harian, ketidakpastian parameter epidemiologi serta ketidakhomogenan populasi boleh mempengaruhi prestasi praktikal sesuatu kaedah. Tambahan pula, model SIR yang digunakan adalah model asas dengan parameter tetap, yang mungkin tidak menghasilkan dinamik yang cukup kompleks untuk menonjolkan perbezaan ketara antara kaedah tertib kedua dan tertib keempat. Oleh itu, perbezaan kecil yang diperhatikan tidak menunjukkan keunggulan mutlak sesuatu kaedah, sebaliknya menekankan kepentingan menilai prestasi numerik dalam konteks data sebenar.

3.1 Implikasi Model

Hasil simulasi yang diperoleh melalui model SIR memberikan gambaran kuantitatif mengenai trajektori wabak, termasuk anggaran tempoh dan magnitud puncak jangkitan. Maklumat ini penting dalam menilai tekanan maksimum terhadap sistem kesihatan serta merancang kapasiti rawatan seperti penyediaan katil hospital dan sumber perubatan. Dengan menggunakan parameter kadar penularan dan kadar pemulihan yang bersesuaian, model ini boleh berfungsi sebagai alat simulasi awal untuk mengunjurkan perkembangan wabak dalam tempoh tertentu.

Pendekatan numerik yang digunakan juga membolehkan analisis senario melalui pelarasan parameter epidemiologi. Sebagai contoh, perubahan kadar penularan boleh digunakan untuk mensimulasikan kesan intervensi seperti penjarakan sosial, peningkatan liputan vaksinasi atau pengurangan kadar kontak sosial. Simulasi sedemikian membolehkan penilaian awal terhadap potensi perubahan trajektori wabak serta kesannya terhadap magnitud puncak jangkitan sebelum sesuatu dasar dilaksanakan. Dengan mengintegrasikan hasil simulasi ini dalam proses perancangan, pembuat dasar dapat membuat keputusan yang lebih berasaskan data dan mengurangkan risiko ketidaksediaan sistem kesihatan semasa fasa kritikal wabak.

3.2 Keterbatasan Kajian

Walaupun model SIR yang digunakan berjaya menggambarkan dinamik umum penularan COVID-19, kajian ini mempunyai beberapa keterbatasan. Model tersebut mengandaikan populasi tertutup dengan kadar penularan dan pemulihan yang malar sepanjang tempoh simulasi. Dalam realiti, kadar ini boleh berubah akibat intervensi kesihatan awam, perubahan tingkah laku masyarakat serta faktor persekitaran. Selain itu, model SIR asas tidak mengambil kira heterogeniti populasi seperti perbezaan umur, mobiliti atau tahap imuniti yang berbeza. Andaian homogen ini boleh menyebabkan penyederhanaan terhadap dinamika sebenar penularan penyakit. Penggunaan model kompartmen yang lebih kompleks seperti SEIR atau model berstruktur umur berpotensi memberikan gambaran yang lebih terperinci.

Kajian ini juga bergantung kepada data kes yang dilaporkan secara rasmi, yang mungkin dipengaruhi oleh kelewatan pelaporan, perubahan definisi kes atau kekangan dalam sistem pengesanan. Faktor-faktor ini boleh menjejaskan ketepatan anggaran parameter dan seterusnya mempengaruhi hasil simulasi. Tambahan pula, model ini tidak secara eksplisit mengambil kira kesan vaksinasi, pelaksanaan sekatan pergerakan atau kemunculan varian baharu virus yang boleh mengubah kadar kebolehjangkitan. Faktor-faktor tersebut berpotensi mempengaruhi nilai kadar penularan dan pemulihan secara dinamik sepanjang tempoh kajian. Oleh kerana parameter dalam model dianggap malar, perubahan struktur akibat intervensi kesihatan awam atau evolusi virus tidak dimodelkan secara langsung. Oleh itu, hasil simulasi perlu ditafsirkan sebagai gambaran umum dinamik wabak dalam kerangka parameter purata sepanjang tempoh kajian.

4. Kesimpulan

Kajian ini mensimulasikan dinamik penularan COVID-19 di Pulau Pinang menggunakan model SIR serta membandingkan prestasi kaedah Runge-Kutta tertib keempat dan kaedah peramal-pembetulan Heun. Kedua-dua kaedah berjaya menggambarkan trajektori wabak secara konsisten dan memberikan anggaran yang hampir dengan data sebenar, termasuk penentuan tempoh puncak jangkitan yang sama. Walaupun RK4 mempunyai ketepatan teori yang lebih tinggi, dapatan kajian menunjukkan bahawa dalam konfigurasi parameter dan langkah masa yang digunakan, kedua-dua

kaedah memberikan prestasi yang setanding. Perkara ini menekankan bahawa pemilihan kaedah numerik dalam pemodelan epidemiologi perlu mempertimbangkan konteks aplikasi sebenar dan bukan hanya tertib teorinya. Kajian ini mempunyai beberapa keterbatasan, termasuk andaian populasi tetap dan parameter malar sepanjang tempoh simulasi. Namun demikian, analisis yang dijalankan menyumbang kepada pemahaman tentang kesesuaian praktikal kaedah numerik dalam pemodelan epidemiologi tempatan serta boleh dijadikan asas untuk kajian lanjutan yang melibatkan model yang lebih kompleks dan parameter dinamik.

Acknowledgement

Penulis merakamkan setinggi-tinggi penghargaan kepada Universiti Sains Malaysia atas sokongan kewangan melalui Bridging Grant (R501-LR-RND003-0000002089-0000).

Conflict of Interest Statement

Penulis mengisytiharkan bahawa tiada sebarang konflik kepentingan berhubung dengan penerbitan artikel ini. Penyelidikan ini dijalankan tanpa sebarang hubungan komersial atau kewangan yang boleh ditafsirkan sebagai potensi konflik kepentingan.

Author Contributions Statement

Nur Rusyidah Azri menjalankan eksperimen dan analisis data serta menulis manuskrip. Saratha Sathasivam merangka dan mereka bentuk kajian, menyelia pelaksanaan penyelidikan, serta menyemak dan menambah baik manuskrip. Aceng Sambas menyumbang kepada interpretasi data dan menyediakan draf awal manuskrip. Semua penulis terlibat dalam semakan manuskrip, membaca dan meluluskan versi akhir untuk penerbitan.

Data Availability Statement

Data dalam kajian ini diperoleh daripada sumber rasmi Kementerian Kesihatan Malaysia (KKM) dan tersedia secara umum melalui portal data terbuka kerajaan. Tiada data baharu dijana dalam kajian ini.

Ethics Statement

Kajian ini melibatkan analisis data sekunder yang diperoleh daripada sumber rasmi Kementerian Kesihatan Malaysia dan tersedia secara umum. Kajian ini tidak melibatkan pengumpulan data primer, interaksi langsung dengan peserta manusia, atau penggunaan maklumat peribadi yang boleh dikenal pasti. Oleh itu, kelulusan etika formal dan persetujuan bertulis daripada peserta tidak diperlukan.

References

- [1] Tang, Biao, Xia Wang, Qian Li, Nicola Luigi Bragazzi, Shi Tang, Yanni Xiao, and Jianhong Wu. 2020. "Estimation of the transmission risk of the 2019-nCoV and its implication for public health interventions." *Journal of Clinical Medicine* 9, no. 2: 462. <https://doi.org/10.3390/jcm9020462>
- [2] Wu, Joseph T., Kathy Leung, and Gabriel M. Leung. 2020. "Nowcasting and forecasting the potential domestic and international spread of the 2019-nCoV outbreak originating in Wuhan, China: A modelling study." *The Lancet* 395, no. 10225: 689–697. [https://doi.org/10.1016/S0140-6736\(20\)30260-9](https://doi.org/10.1016/S0140-6736(20)30260-9)
- [3] Elengoe, Asani. 2020. "COVID-19 outbreak in Malaysia." *Osong Public Health and Research Perspectives* 11, no. 3: 93–100. <https://doi.org/10.24171/j.phrp.2020.11.3.08>
- [4] Wangping, Jia, He Ke, Yang S., Chen Wenzhe, Wang Shengshu, Yang Shanshan, Wang Jianwei, Kang Fuyin, Tang Penggang, Luo Jing, Li Miao, and He Yao. 2020. "Extended SIR prediction of the epidemics trend of COVID-19 in Italy and compared with Hunan, China." *Frontiers in Medicine* 7: 169. <https://doi.org/10.3389/fmed.2020.00169>
- [5] Wang, Lei, Yuhang Zhou, Jie He, Bing Zhu, Feng Wang, Lin Tang, Michael Kleinsasser, Douglas Barker, Marisa C. Eisenberg, and P. X.-K. Song. 2020. "Rejoinder: An epidemiological forecast model and software assessing

- interventions on COVID-19 epidemic in China." *Journal of Data Science* 18, no. 3: 395–397. [https://doi.org/10.6339/JDS.202007_18\(3\).0009](https://doi.org/10.6339/JDS.202007_18(3).0009)
- [6] Harzheim, Erno, Carla Martins, Luana Wollmann, Luiz A. Pedebos, Leonardo de A. Faller, Maria das C. Marques, T. S. S. Minei, C. R. H. da Cunha, L. F. Telles, L. J. N. de Moura, M. H. Leal, A. S. Rodrigues, M. R. A. Rech, and O. P. D'Avila. 2020. "Ações federais para apoio e fortalecimento local no combate ao COVID-19: A Atenção Primária à Saúde (APS) no assento do condutor." *Ciência & Saúde Coletiva* 25, no. 6: 2493–2497. <https://doi.org/10.1590/1413-81232020256.1.11492020>
- [7] Xiong, Jiaqi, Orly Lipsitz, Flora Nasri, Louisa M. W. Lui, Hannah Gill, Lee Phan, D. Chen-Li, Michael Iacobucci, Roger Ho, Areej Majeed, and Roger S. McIntyre. 2020. "Impact of COVID-19 pandemic on mental health in the general population: A systematic review." *Journal of Affective Disorders* 277: 55–64. <https://doi.org/10.1016/j.jad.2020.08.001>
- [8] Sanchez, A. R., A. V. Monte de Oca, D. F. Montero, Y. R. Malven, S. S. Dominguez, and A. I. R. Chaveco. 2023. "Simplified mathematical modeling on person-to-person disease transmission: The coronavirus case." *European Journal of Theoretical and Applied Sciences* 1, no. 5: 697–706. [https://doi.org/10.59324/ejtas.2023.1\(5\).59](https://doi.org/10.59324/ejtas.2023.1(5).59)
- [9] Palmer, Stephen R. 1989. "Review article: Epidemiology in search of infectious diseases: Methods in outbreak investigation." *Journal of Epidemiology and Community Health* 43, no. 4: 311–315. <https://doi.org/10.1136/jech.43.4.311>
- [10] Odagaki, Takashi. 2023. "New compartment model for COVID-19." *Scientific Reports* 13, no. 1: 5605. <https://doi.org/10.1038/s41598-023-32159-6>
- [11] Mangal, Saurabh, Om Prakash Misra, and Jitendra Dhar. 2023. "SIRS epidemic modeling using fractional-ordered differential equations: Role of fear effect." *International Journal of Biomathematics*. <https://doi.org/10.1142/S1793524523500444>
- [12] İlhan, Ömer, and Gökhan Şahin. 2024. "A numerical approach for an epidemic SIR model via Morgan-Voyce series." *International Journal of Mathematics and Computer in Engineering* 2, no. 1: 1–12. <https://doi.org/10.2478/ijmce-2024-0010>
- [13] Prathom, Kittipong, and Anan Jampeepan. 2023. "Direct numerical solutions of the SIR and SEIR models via the Dirichlet series approach." *PLoS ONE* 18, no. 6: e0287556. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0287556>
- [14] Azri, Nur Rusyidah, Saratha Sathasivam, C. J. Nam, and T. Hang. 2023. "Forecast on COVID-19 cases in Malaysia using SIRS model and Adams predictor-corrector method." *Journal of Quality Measurement and Analysis (JQMA)* 19, no. 1: 59–73.
- [15] Salaudeen, A., Saratha Sathasivam, C. Jun Nam, and T. Yi Hang. 2024. "Modelling the early outbreak of COVID-19 disease in Malaysia using SIRS model with 4-step Adams–Bashforth–Moulton predictor-corrector method." *Applied Mathematics and Computational Intelligence (AMCI)* 13, no. 2: 121–136. <https://doi.org/10.58915/amci.v13i2.227>
- [16] Miller, Joel C., and Erik M. Volz. 2013. "Model hierarchies in edge-based compartmental modeling for infectious disease spread." *Journal of Mathematical Biology* 67, no. 4: 869–899. <https://doi.org/10.1007/s00285-012-0572-3>
- [17] Kermack, William O., and Anderson G. McKendrick. 1927. "A contribution to the mathematical theory of epidemics." *Proceedings of the Royal Society of London. Series A* 115, no. 772: 700–721. <https://doi.org/10.1098/rspa.1927.0118>
- [18] Sikder, A. K., M. B. Hossain, and M. H. Islam. 2023. "Compartmental modelling in epidemic diseases: A comparison between SIR model with constant and time-dependent parameters." *Inverse Problems* 39, no. 3: 035004. <https://doi.org/10.1088/1361-6420/acb4e7>
- [19] Popova, A. Y., N. V. Zaitseva, V. B. Alekseev, A. N. Letyushev, D. A. Kiryanov, S. V. Kleyn, M. R. Kamaltdinov, and M. V. Glukhikh. 2023. "Heterogeneity of the modified SIR-model parameters of waves of COVID-19 epidemic process in the Russian Federation." *Gigiena i Sanitariya* 102, no. 8: 740–749. <https://doi.org/10.47470/0016-9900-2023-102-8-740-749>
- [20] Biswas, B. N., S. Chatterjee, S. P. Mukherjee, and S. Pal. 2013. "A discussion on Euler method: A review." *Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications* 1, no. 2: 30–42.
- [21] Zaitsev, V. V., and E. Yu. Fedyunin. 2019. "The predictor-corrector method for modelling of nonlinear oscillators." *Vestnik of Samara University. Natural Science Series* 25, no. 1: 97–103. <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-1-97-103>
- [22] Chen, Hong, Iman Ahmadianfar, Guojun Liang, Hossein Bakhisizadeh, Bahman Azad, and Xiaohui Chu. 2022. "A successful candidate strategy with Runge–Kutta optimization for multi-hydropower reservoir optimization." *Expert Systems with Applications* 209: 118383. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2022.118383>
- [23] Hu, Guang Da. 2017. "A modified Runge–Kutta method for nonlinear dynamical systems with conserved quantities." *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* 12, no. 5: 051007. <https://doi.org/10.1115/1.4036761>

- [24] Akinsola, Victor. 2023. "Numerical methods: Euler and Runge–Kutta." In *Qualitative and Computational Aspects of Dynamical Systems*. <https://doi.org/10.5772/intechopen.108533>
- [25] Pornphol, P., P. Hammachukiattikul, R. Vadivel, S. A. Adebayo, and Saratha Sathasivam. 2024. "Compartmental equations hybrid model for modelling water pollution transmission." *Journal of Advanced Research in Fluid Mechanics and Thermal Sciences* 115, no. 1: 30–50. <https://doi.org/10.37934/arfmts.115.1.3050>
- [26] Pons-Salort, M., J. John, O. J. Watson, N. F. Brazeau, R. Verity, G. Kang, and N. C. Grassly. 2022. "Reassessing reported deaths and estimated infection attack rate during the first 6 months of the COVID-19 epidemic, Delhi, India." *Emerging Infectious Diseases* 28, no. 4: 743–750. <https://doi.org/10.3201/eid2804.210879>
- [27] Zenian, S. 2022. "The SIR model for COVID-19 in Malaysia." *Journal of Physics: Conference Series* 2314, no. 1: 012007. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2314/1/012007>